b) Pour tout x > 0, $f(x)-x=x^2\underbrace{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]}_{<0\,d'après\,la\,question\,3-a)}$ donc f(x) – x < 0. **Conclusion** : C_f est au dessous de (D)

2.a) $1-t-\frac{1}{1+t}=\frac{1-t^2-1}{1+t}=\frac{-t^2}{1+t}\le 0$ et on a : $\frac{1}{1+t}-\left(1-t+t^2\right)=\frac{-t^3}{1+t}\le 0\ \forall t\in[0,+\infty[$. Donc

$1-t\le\frac{1}{1+t}\le 1-t+t^2\ \forall t\in[0,+\infty[$.

b) les fonctions : $t\mapsto 1-t;\ t\mapsto\frac{1}{t+1}$ *et* $t\mapsto 1-t+t^2$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\in[0,+\infty[$ on a :

$\int_0^x(1-t)dt\le\int_0^x\frac{1}{1+t}dt\le\int_0^x\left(1-t+t^2\right)dt\Rightarrow x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

c) on a : $\forall x>0\ \ x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ \Leftrightarrow-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)-x\le-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

or $x^2>0\Rightarrow-\frac{1}{2}\le\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$ donc: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

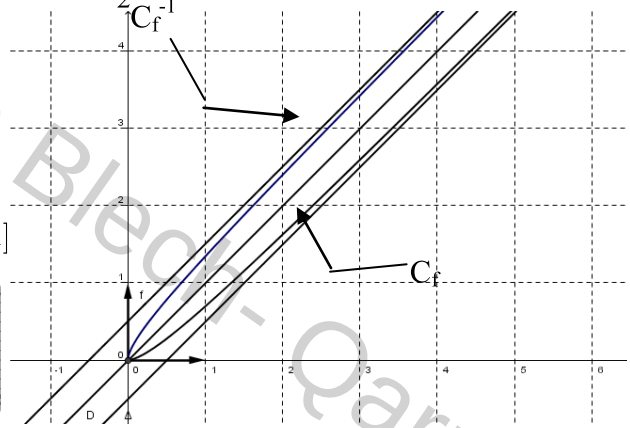
3.a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\underset{\text{et }\lim\limits_{x\to+\infty}X=0^+}{\overset{\text{on pose } X=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(1+X)}{X^2}-\frac{1}{X}+\frac{1}{2}\right]=\lim\limits_{X\to0^+}\underbrace{\frac{\ln(1+X)-X}{X^2}}_{=-\frac{1}{2}\ D'après\,la\,question\,3-c)}+\frac{1}{2}=0$.

Ce qui interprète que C_f admet la droite $\Delta: y=x-\frac{1}{2}$ comme asymptote oblique au voisinage de +∞.

b) $\forall\ x>0; f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{h\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}>0$ avec $h(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ d'après la question 4 – a)

et $f(0)-\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$ d'où C_f est au-dessus de Δ.

b) voir figure.



c)

4.a) $A_\lambda=\int_\lambda^1|f(x)|dx=\int_\lambda^1 f(x)dx\ car\ f(x)>0\ \ \forall x\in[\lambda,1]$

$=\int_\lambda^1 x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx\ \begin{pmatrix}u'(x)=x^2\Leftarrow u(x)=\frac{1}{3}x^3\\ v(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow v'(x)=\frac{-1}{x(x+1)}\end{pmatrix}$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_\lambda^1-\int_\lambda^1\frac{1}{3}x^3.\left(\frac{-1}{x(x+1)}\right)dx=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\int_\lambda^1\frac{x^2}{x+1}dx=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\left[h(x)\right]_\lambda^1$

(car $h(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt$ est la primitive sur IR\{-1} de la fonction $\left(x\mapsto\frac{x^2}{1+x}\right)$ qui s'annule en 0) donc

$A_\lambda=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\left[h(1)-h(\lambda)\right]=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}+\ln 2-\frac{\lambda^2}{2}+\lambda-\ln(1+\lambda)\right]$

$A_\lambda=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{3}\ln(1+\lambda)-\frac{1}{6}\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda$ et

Qarray.tn-Agra Blech- Qarray.tn
Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...